

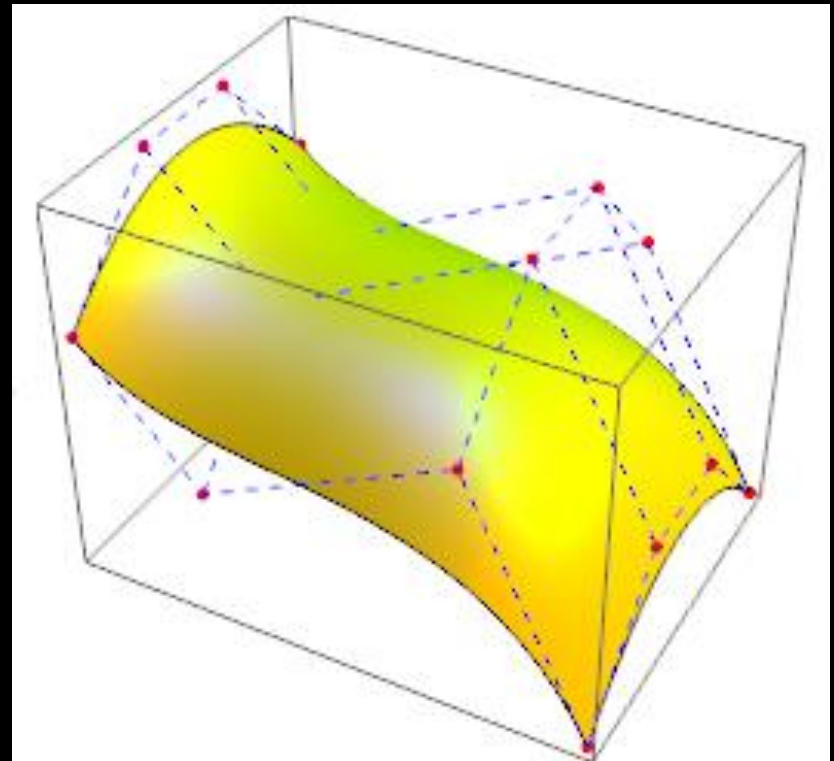


Računarska grafika

predavanja
v.prof.dr. Samir Lemeš
slemes@unze.ba

Parametarske površine

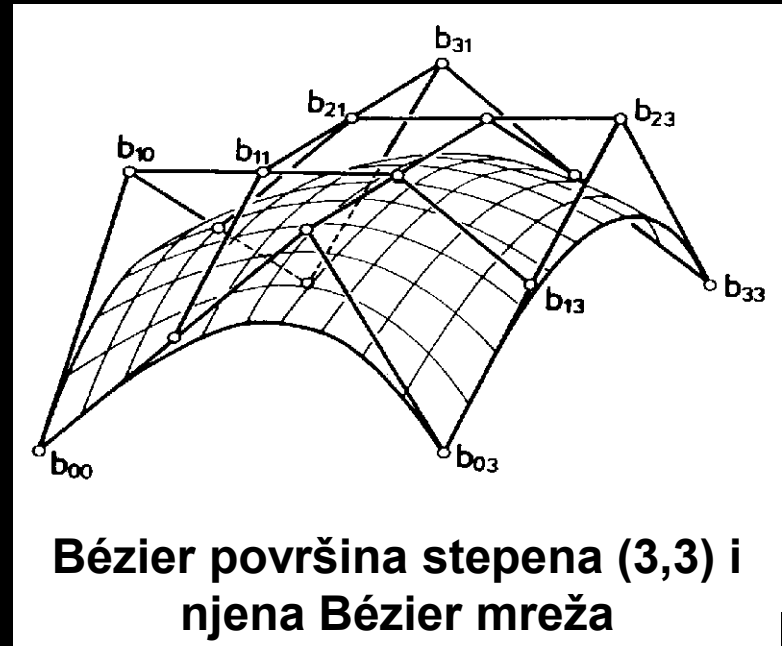
- Bézier površine
- Osobine Bézier površina
- Mreže Bézier površina
- Kontinuitet
- Bézier površina
- B-Spline površine



Bézier površine

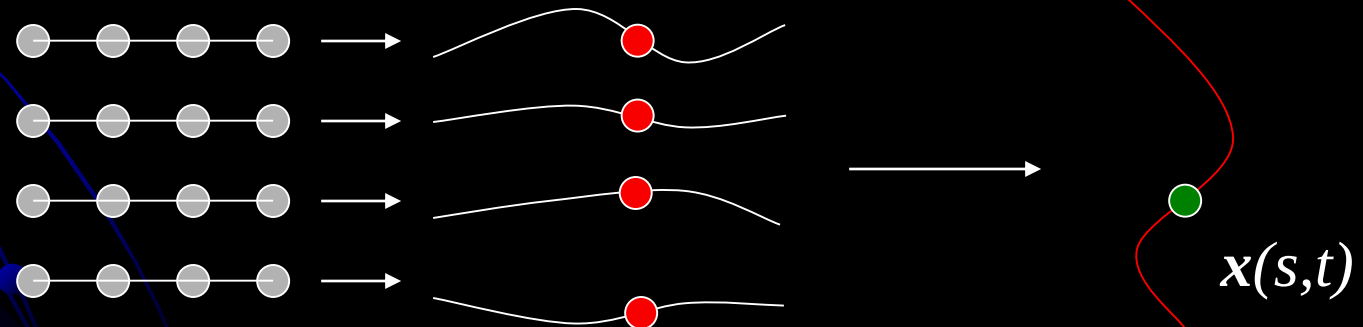
$$\mathbf{x}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} B_i^n(s) B_j^m(t)$$

- Kao i Bézier krivulje, $B_i^n(s)$ i $B_j^m(t)$ su Bernstein polinomi stepena n i m
- Najčešće se koristi $n=m=3$: *kubna Bézier površina*
 - Potrebno joj je $4 \times 4 = 16$ kontrolnih tačaka, $P_{i,j}$



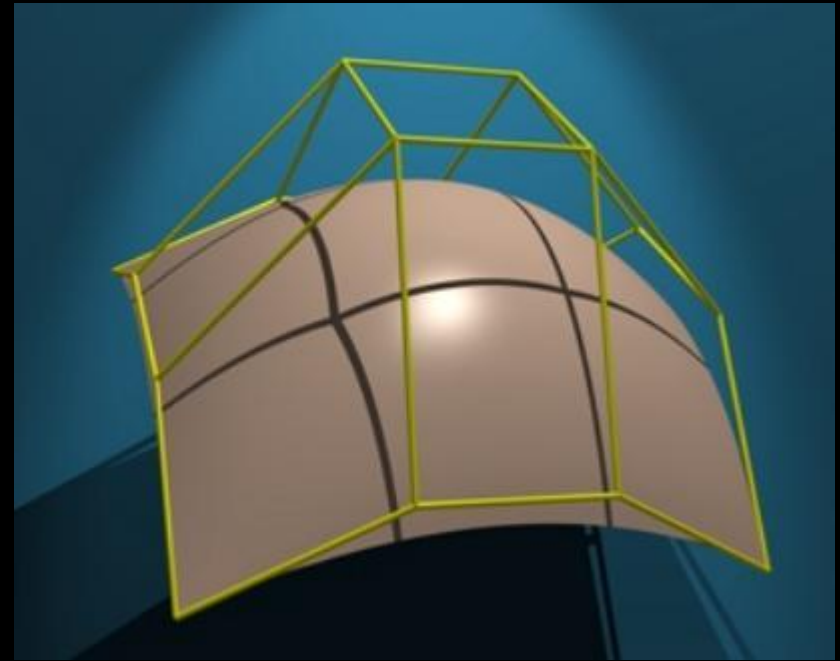
Bézier površine

- Rubne krivulje su Bézier krivulje
- Svaka krivulja konstante s ili t je Bézier krivulja
- Jedan način razmišljanja o tome:
 - Svaki red od 4 kontrolne tačke definiše Bézier krivulju u s
 - Razvijanje svake od tih krivulja za isto s daje 4 virtualne kontrolne tačke
 - Virtualne kontrolne tačke definišu Bézier krivulju u t
 - Razvijanje te krivulje u t daje tačku $x(s,t)$



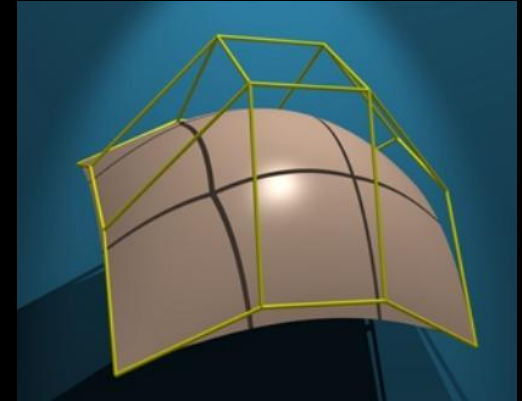
Osobine Bézier površina

- Koje čvorove interpolira Bézier površina (ako ih interpolira)?
- Zašto?
- Površina interpolira svoje krajnje tačke
- To dolazi iz osobine interpolacije krivulja koje je formiraju



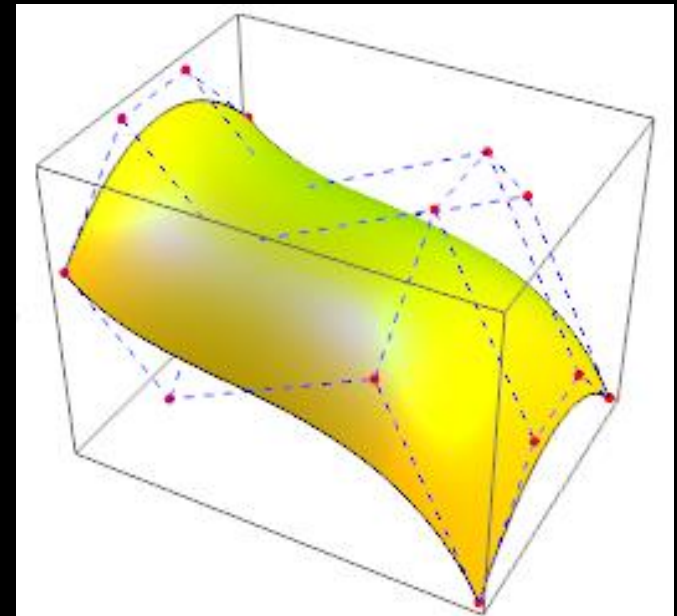
Osobine Bézier površina

- Šta se može reći za tangentnu ravan na svakom uglu?
 - Zašto?
- Tangentna ravan u svakom uglu interpolira krajnje čvorove i dva susjedna rubna čvora
 - Tangentna ravan je ravan koja je okomita na vektor normale u nekoj tački
 - Osobine tangentne ravni se izvode iz osobina tangente na krivulju i načina određivanja vektora normale



Osobine Bézier površina

- Da li cijela Bezier površina leži unutar konveksnog gabarita definisanog njenim kontrolnim tačkama?
- Površina leži unutar konveksnog gabarita definisanog njenim kontrolnim tačkama
 - Osnovne funkcije imaju zbir 1 i svugdje su pozitivne



Matrični oblik Bézier površina

$$x(s, t) = S^T B^T P B T$$

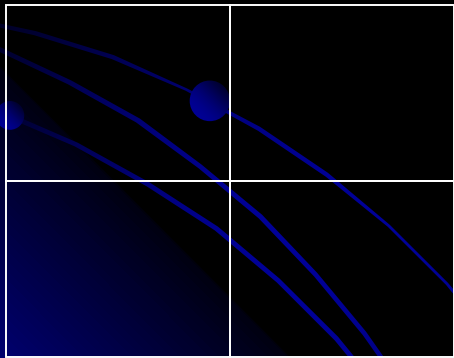
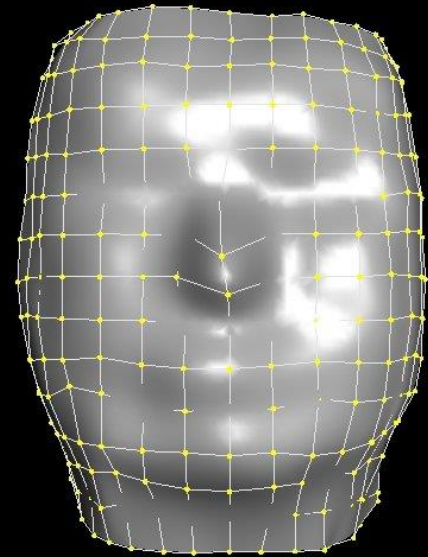
$$x(s, t) = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 3 matrice ostaju iste ako se kontrolne tačke ne mijenjaju
- Srednji proizvod se može ranije izračunati, tako da ostaje samo:

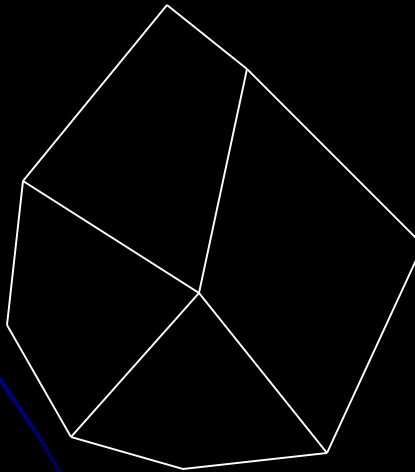
$$x(s, t) = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & M_{0,3} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,0} & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mreže Bézier površina

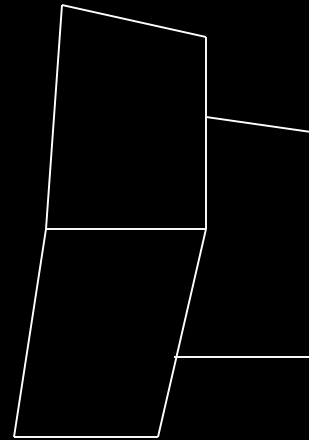
- Mreža površina je skup površina koje su međusobno spojene po ivicama
 - Površine su spojene duž cijelih ivica
 - Svaka površina mora biti četverougla



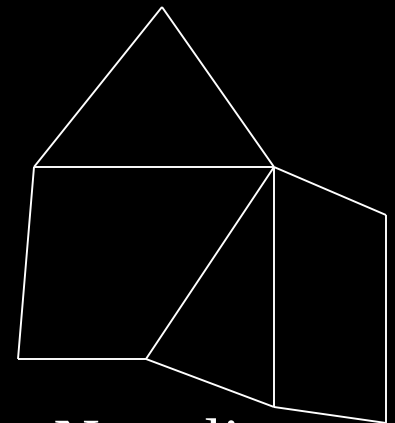
OK



OK



Ne valja



Ne valja

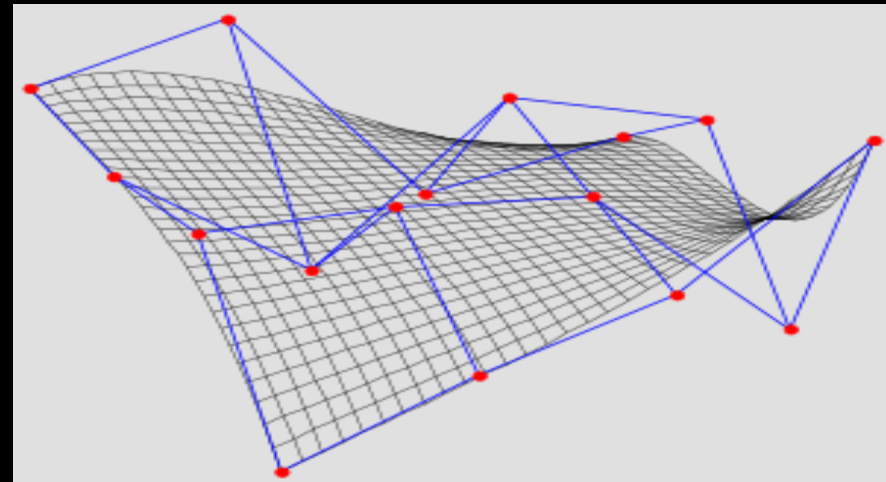
Kontinuitet Bézier mreže

- Kao i kod krivulja, kontrolne tačke se moraju povinovati ograničenjima da bi se osigurao parametarski kontinuitet
- C^0 kontinuitet po ivici?
 - Zajedničke kontrolne tačke po ivici
- C^1 kontinuitet po ivici?
 - Kontrolne tačke na ivici su kolinearne i na istim međusobnim rastojanjima
- C^2 kontinuitet po ivici?
 - Ograničenja se produžuju do tačaka koje su daleko od ivice



Kontinuitet Bézier mreže

- Za geometrijski kontinuitet, ograničenja su manje stroga
 - Još uvijek kolinearna za G^1 , ali mogu biti bilo gdje na liniji
- Šta se može reći o čvorovima oko ugla ako mora biti zadovoljen C^1 kontinuitet na krajnjim tačkama?
 - Oni leže u istoj ravni (ne unutrašnje tačke, samo ugao i ivica)

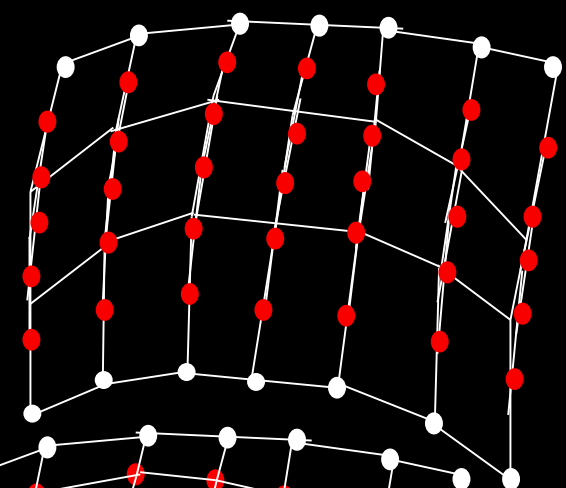
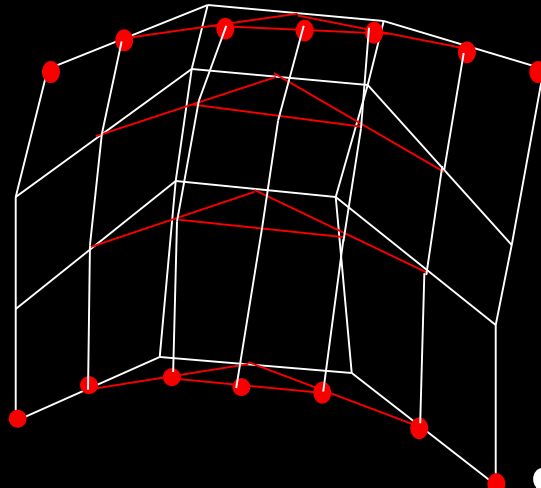
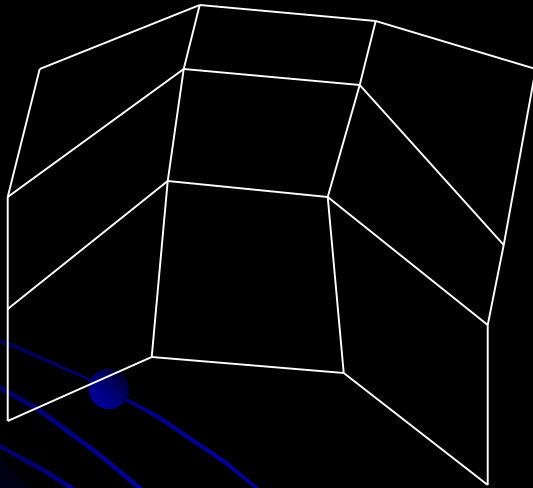


Rasterizacija Bézier površine

- Opcija 1: Odrediti fiksni skup vrijednosti parametara i spojiti ih trouglovima
 - Ne mogu se koristiti četvorouglovi jer tačke mogu biti izvan jedne ravni
 - Idealna situacija za trake od trouglova
 - Prednost: Jednostavni, i OpenGL ima naredbe koje to mogu realizovati
 - Nedostatak: Teško se kontroliše kvalitet izgleda
- Opcija 2: Podjela na manje dijelove
 - Dopušta kontrolu grešaka u aproksimaciji trouglova
 - Proširiti podjelu 1D krivulja da se dobiju površine

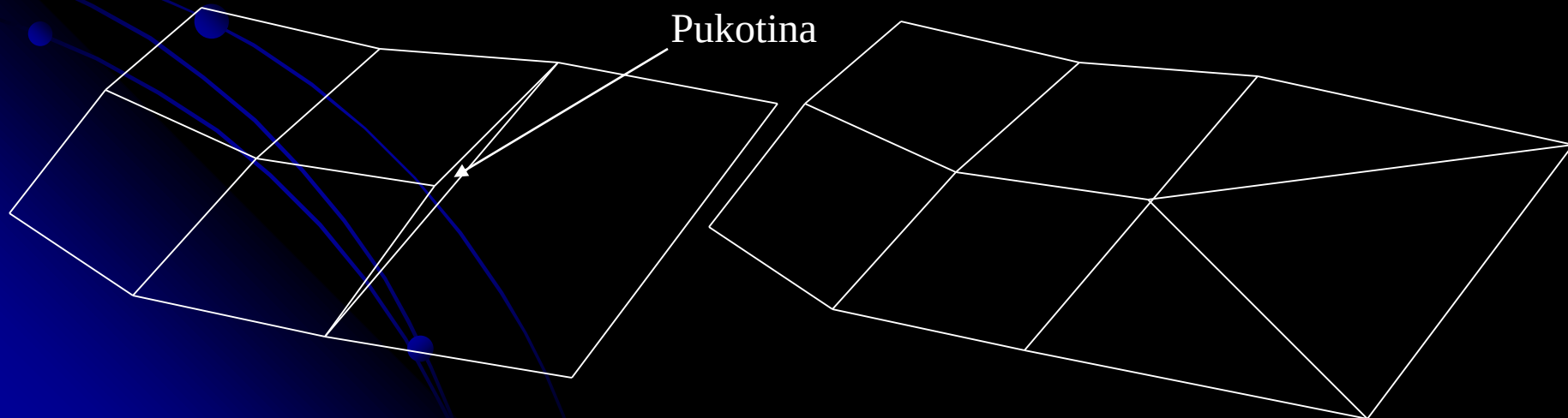
Podjela srednjim tačkama

- Spajaju se srednje tačke da bi se dobili novi kontrolni čvorovi
 - Prvo se podijeli svaki red početnih kontrolnih tačaka: $4 \times 4 \rightarrow 4 \times 7$
 - Zatim se to ponavlja za svaku kolonu novih kontrolnih tačaka: $4 \times 7 \rightarrow 7 \times 7$



Potencijalni problem

- (Dobar) način podjele:
 - Ako je kontrolna mreža dovoljno ravna – nacrtajte je
 - Ako nije, podijelite je na 4 manje mreže i ponovite postupak za svaku
- Problem: Može se desiti da susjedne površine ne budu podijeljene na isti broj pod-mreža
 - Mogu se pojaviti pukotine zbog različitih kontrolnih mreža ivica
 - To se popravljja uvođenjem dodatnih ivica



Podjela površine

Podjela površine

*Mreža
trouglova*

*Mreža
četverouglova*

Petlja (C^2)

Catmull-Clark
(C^2)

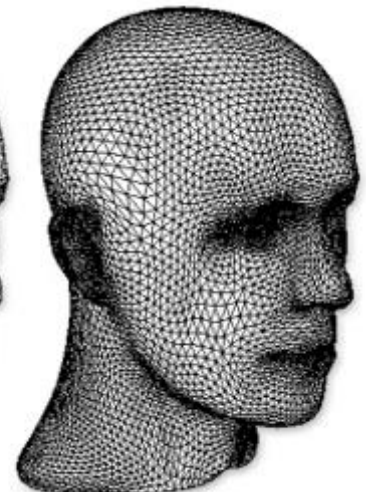
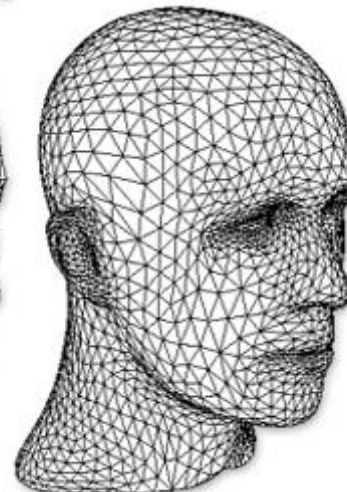
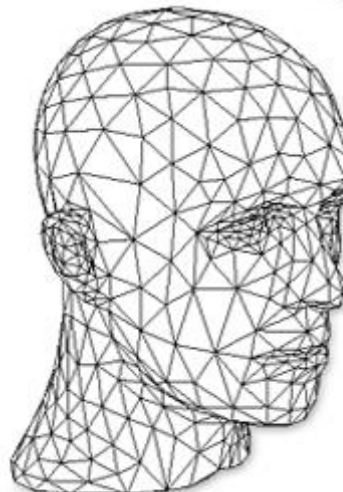
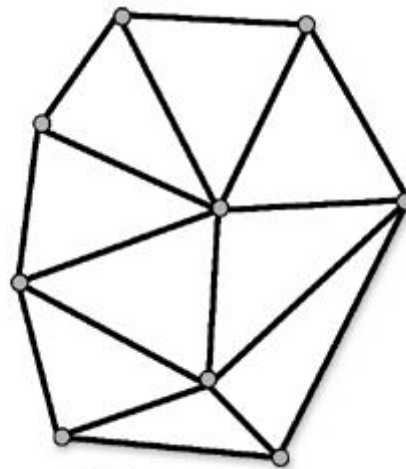
Mod.
Butterfly
(C^1)

Kobbelt (C^1)

Podjela čvorova

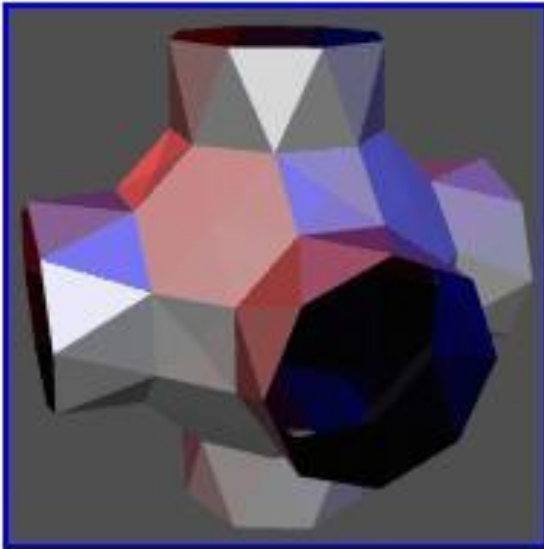
Doo-Sabin, Midedge (C^1)

Biquartic (C^2)

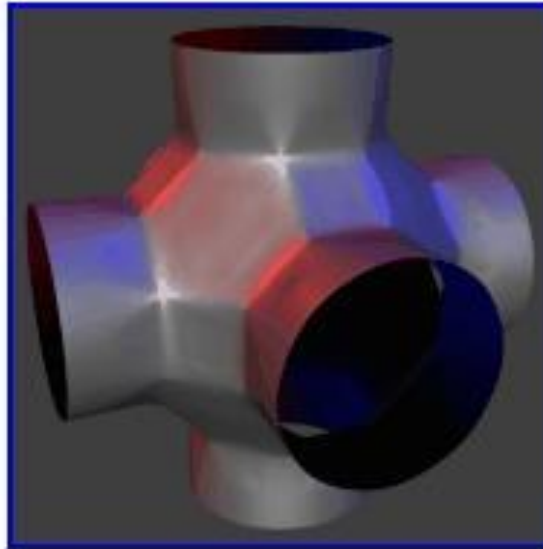


Podjela površine

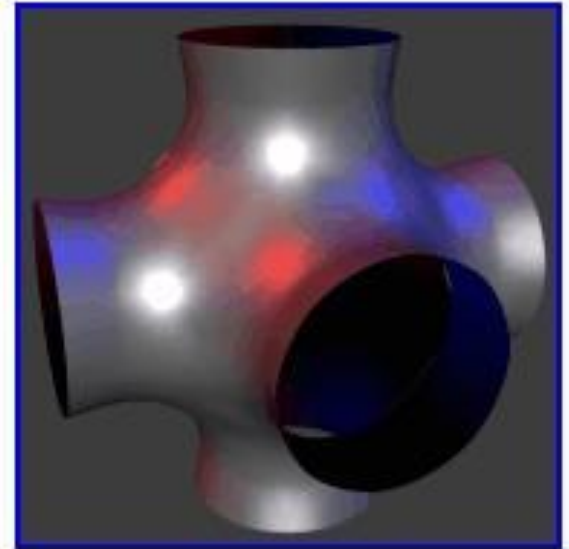
- Butterfly



initial mesh



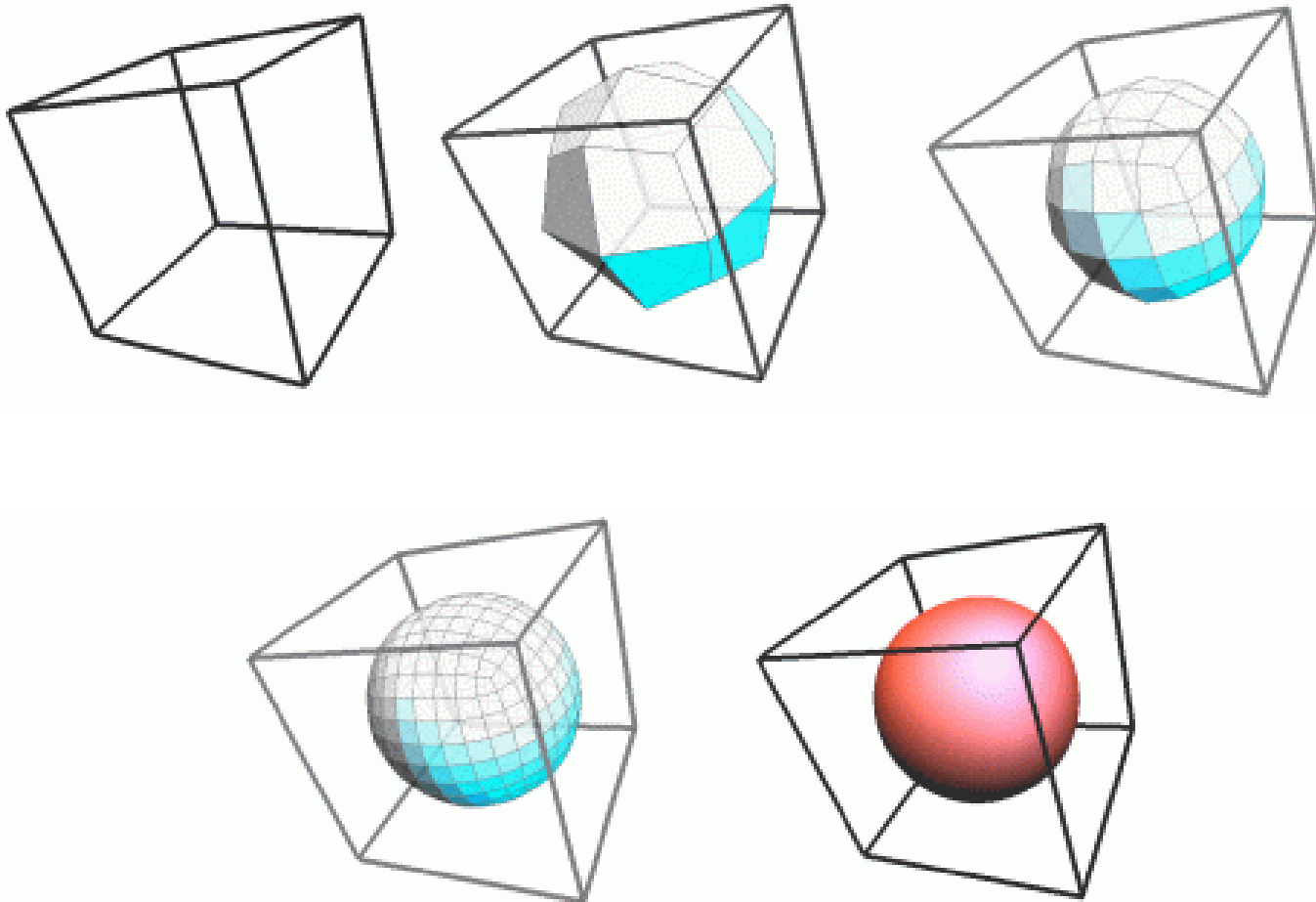
Butterfly subdivision



Modified Butterfly subdivision

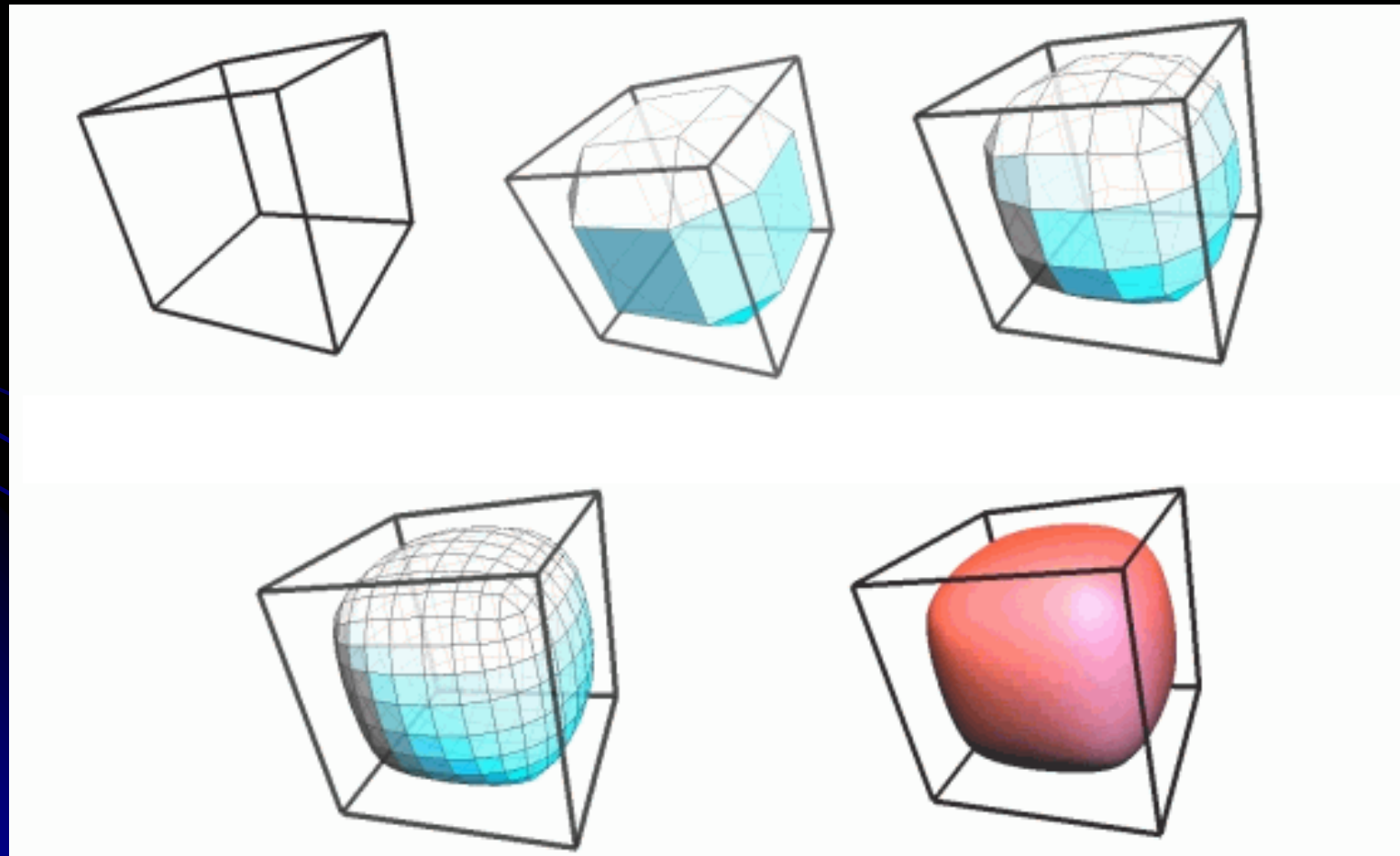
Podjela površine

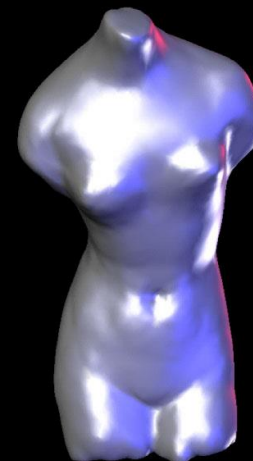
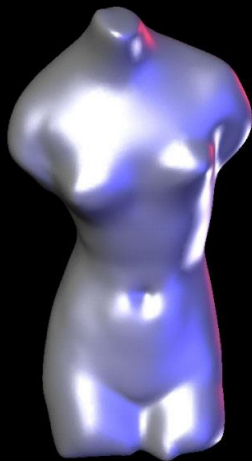
- Cattmull-Clark



Podjela površine

- Doo-Sabin



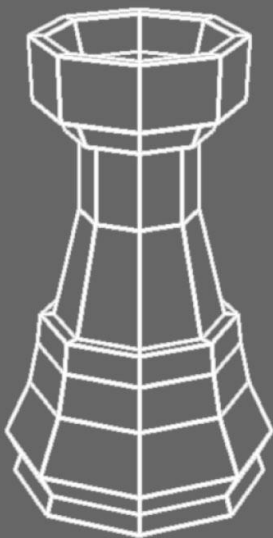


Loop

Butter

Catmull-Clark

Doo-Sabin



Initial mesh

Loop

Catmull-Clark

*Catmull-Clark, after
triangulation*

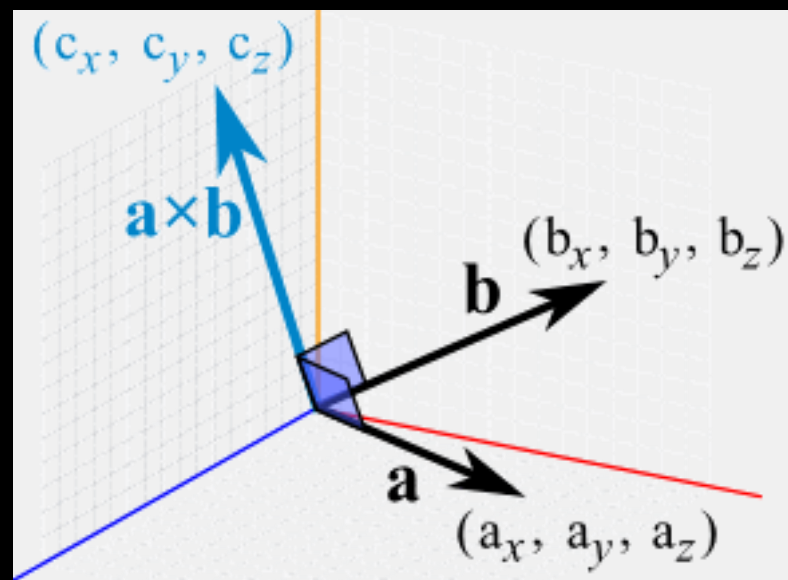
Izračunavanje vektora normala

- Parcijalni izvod u smjeru s je vektor tangente
- Parcijalni izvod u smjeru t je drugi vektor tangente
- Izračuna se njihov vektorski proizvod i normalizuje se da bi se dobio vektor normale na površinu

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \bigg|_{s,t} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \bigg|_{s,t} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \bigg|_{s,t} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} \frac{dB_i^n}{ds} \bigg|_s B_j^m(t)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \bigg|_{s,t} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} B_i^n(s) \frac{dB_j^m}{dt} \bigg|_t$$



Problemi sa Bézier krivuljama/površinama

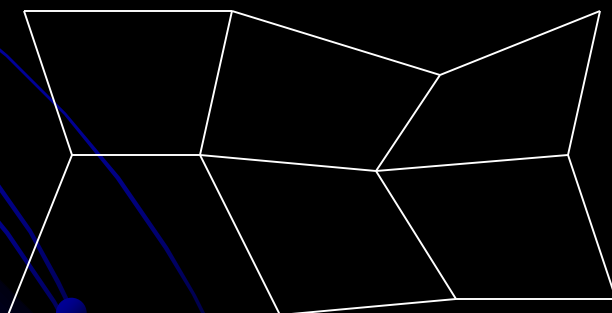
- Da bi se napravila dugačka kontinuirana krivulja sa Bézier segmentima potreban je veliki broj segmenata
 - Isto vrijedi i za velike površine
- Održavanje kontinuiteta zahtijeva ograničenja na mjestima kontrolnih tačaka
 - Korisnik ne može slobodno pomjerati kontrolne čvorove i automatski održati kontinuitet
 - Ograničenja treba eksplicitno održavati
 - Nije intuitivno ako kontrolne tačke nisu slobodne

B-Spline površine

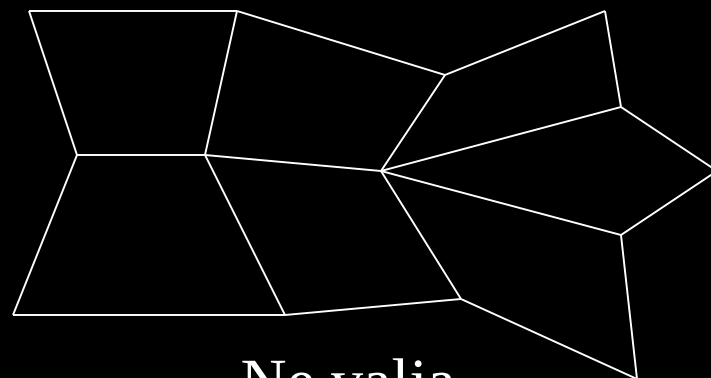
- Definišu se kao i Bézier površine:

$$X(s, t) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n P_{j,k} B_{j,d}(s) B_{k,d}(t)$$

- Kontinuitet se svuda postiže automatski
- Kontrolne tačke moraju biti u pravougloj mreži



OK



Ne valja

Kako izabrati splajn

- Hermitove krivulje su dobre za pojedinačne segmente kad se znaju parametarski izvodi ili se žele lako kontrolisati
- Bézier krivulje su dobre za pojedinačne segmente ili površine gdje korisnik kontroliše tačke
- B-splajnovi su dobri za velike kontinuirane krivulje i površine
- NURBS su najopštiji i dobri su kad se moraju precizno prikazati konusne površine (CAD)

NURBS

